

# ГЕОДЕЗИЯ И МАРКШЕЙДЕРИЯ

УДК 528.1

DOI: 10.33764/2411-1759-2020-25-3-5-13

## МЕТОД ПСЕВДОНОРМАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ УРАВНИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

*Амридон Гемзаевич Барлиани*

Сибирский государственный университет геосистем и технологий, 630108, Россия, г. Новосибирск, ул. Плахотного, 10, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной информатики и информационных систем, тел. (383)343-18-35

*Галина Александровна Нефедова*

Сибирский государственный университет геосистем и технологий, 630108, Россия, г. Новосибирск, ул. Плахотного, 10, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной информатики и информационных систем, тел. (383)343-18-35

*Ирина Викторовна Карнетова*

Сибирский государственный университет геосистем и технологий, 630108, Россия, г. Новосибирск, ул. Плахотного, 10, старший преподаватель кафедры прикладной информатики и информационных систем, тел. (383)343-18-35

Целью представленной работы является сравнительный анализ методов наименьших квадратов и псевдонормальной оптимизации на примере уравнивания и оценки точности звена триангуляции первого класса. Псевдонормальная оптимизация кардинально отличается от традиционного способа оптимизации по методу наименьших квадратов, так как он приводит к сложным и громоздким процедурам уравнивания и оценки точности результатов обработки геодезических построений из-за сложных формул. Приведена рекуррентная методика последовательного формирования псевдообратной матрицы параметрических уравнений поправок, что позволяет миновать трудоемкий вычислительный процесс составления и решения нормальных уравнений. Рассмотрен математический алгоритм оценки точности уравненных параметров. Анализ уравнительных работ показал, что метод псевдонормальной оптимизации позволяет вычислить значения уравненных координат в 4 раза точнее, чем оптимизация по методу наименьших квадратов.

**Ключевые слова:** звено триангуляции первого класса, базисная сторона, вырожденная матрица, уравнение поправок, метод наименьших квадратов, метод псевдонормальной оптимизации, начало координат сети, ранговый дефект матрицы, Евклида норма.

### *Введение*

Долгое время авторам статьи приходилось решать проблемы обработки и анализа различных данных, связанных как с геодезическими, так и с экономическими моделями, методом наименьших квадратов. При анализе результатов обработки часто выяснялось, что выводы, полученные с помо-

щью данного метода, резко контрастировали с ожидаемыми практическими результатами. Это относится в основном к оцениваемым параметрам и их среднеквадратическим ошибкам. Для некоторого класса свободной и несвободной геодезической сети поправки к параметрам и среднеквадратические ошибки параметров получались недопустимо большими.

Следует отметить, что при уравнивании геодезических сетей (особенно больших) коэффициенты уравнений поправок вычисляются приблизительно, что может привести к плохой обусловленности или даже вырождению матрицы коэффициентов нормальных уравнений. Естественно, что в этих и других условиях оценивание параметров геодезических сетей выходит за рамки классического метода наименьших квадратов.

Указанные обстоятельства явились причиной предложить для обработки и анализа геодезических данных теорию, основанную на методе псевдонормальной оптимизации, а также провести на модели звена триангуляции первого класса сравнительный анализ результатов уравнивания и оценки точности для методов наименьших квадратов и псевдонормальной оптимизации.

### Методы и материалы

Прежде чем перейти к сути вопроса, приведем некоторые важные теоретические выкладки, связанные с обработкой геодезических построений. Известно [1–4], что в нивелирных и плановых сетях минимально необходимое число исходных данных  $m$ , привязывающих сеть к фиксированной системе координат, должно быть равно соответственно 1 и 4.

Например, в плановой геодезической сети этими исходными данными являются координаты одного пункта  $(x, y)$ , а также дирекционный угол и длина стороны. На основании этих исходных данных можно зафиксировать начало координат сети, ее ориентацию в пространстве и масштаб.

Если же в геодезической сети имеется  $t < m$  таких исходных данных, то столбцы матрицы коэффициентов уравнений поправок становятся линейно зависимыми. Этот факт приводит к ранговому дефекту  $d$  матрицы  $A$ . Таким образом, при наличии в геодезической сети  $t < m$  таких исходных данных, число  $d = m - t$  называется дефектом исходных данных. Следовательно, при наличии рангового дефекта в матрице параметрических уравнений поправок геодезическая

сеть считается свободной, и при отсутствии – несвободной.

Теперь требуется перейти к конкретной задаче описания алгоритма уравнивания и оценки точности геодезических сетей методом псевдонормальной оптимизации (МПНО) параметрической версии. Пусть уравнивается геодезическая сеть с матрицей параметрических уравнений поправок:

$$A\tilde{\Delta} + l = V. \quad (1)$$

Теорию метода псевдонормальной оптимизации приведем для неравноточно измеренных величин с ковариационной матрицей:

$$K_y = \mu^2 P^{-1}, \quad (2)$$

где  $\mu$  – оценка генеральной средней квадратической ошибки единицы веса;  $P$  – диагональная матрица весов результатов измерений.

В этих условиях система параметрических уравнений поправок (1) переписывается следующим образом:

$$P^{\frac{1}{2}} A \tilde{\Delta} + P^{\frac{1}{2}} l = P^{\frac{1}{2}} V. \quad (3)$$

Необходимо ввести обозначения:

$$P^{\frac{1}{2}} A = \bar{A}, \quad P^{\frac{1}{2}} l = \bar{l}, \quad P^{\frac{1}{2}} V = \bar{V}.$$

С учетом введенных обозначений систему (1) можно переписать в следующей форме:

$$\bar{A}\tilde{\Delta} + \bar{l} = \bar{V}. \quad (4)$$

Так как ранг матрицы  $\bar{A}$  равен рангу матрицы  $A$ , псевдонормальное решение системы (4) запишется так:

$$\tilde{\Delta} = -\bar{A}^+ \bar{l} = -\bar{A}^+ P^{\frac{1}{2}} l. \quad (5)$$

Вектор уравненных значений неизвестных параметров  $\tilde{x}$  можно выразить через вектор-столбец приближенных параметров  $x^0$  и вектор-столбец поправок  $\tilde{\Delta}$  следующим образом:

$$\tilde{x} = x^0 + \tilde{\Delta}. \quad (6)$$

Итак, на основании формул (5) и (6) решается задача уравнивания свободных и несвободных геодезических сетей методом псевдонормальной оптимизации. В данном случае основная проблема состоит в вычислении псевдообратных матриц  $\bar{A}^+$ .

Для вычисления псевдообратной матрицы приведем рекурсивный алгоритм, который основан на блочном представлении матрицы параметрических уравнений поправок [5]:

$$\bar{A}_j^+ = \begin{pmatrix} \bar{A}_{j-1}^+ - \bar{A}_{j-1}^+ \bar{a}_j \bar{\beta}_j \\ \bar{\beta}_j \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Здесь вектор  $\bar{\beta}_j$  для первых  $r$  столбцов определяется по формуле:

$$\bar{\beta}_j = \frac{\bar{C}_j^T}{\|\bar{C}_j\|^2}, \quad (8)$$

а для последних  $d = m - t$  столбцов матрицы  $\bar{A}$  вектор  $\bar{\beta}_j$  находится по формуле:

$$\bar{\beta}_j = \frac{\bar{d}_j^T \bar{A}_{j-1}^+}{1 + \|\bar{d}_j\|^2}, \quad (9)$$

где

$$\bar{d}_j = \bar{A}_{j-1}^+ \bar{a}_j; \quad (10)$$

$$\bar{C}_j = \bar{a}_j - \bar{A}_{j-1}^+ \bar{d}_j. \quad (11)$$

Второй этап уравнивательных вычислений – оценка точности результатов уравнивания. Для оценки точности уравненных параметров воспользуемся готовой формулой, которая позволяет вычислить среднеквадратическую ошибку любого параметра. Она имеет вид [1]:

$$m_{\hat{x}_j} = \mu \|a_j^+\|, \quad (12)$$

где  $\|a_j^+\|$  – евклидова норма  $j$ -го вектора строки псевдообратной матрицы;  $\mu$  – среднеквадратическая ошибка единицы веса, вычисляемая по формуле [2]:

$$\mu = \tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{V^T P V}{n - k + d}}. \quad (13)$$

Так осуществляется уравнивание и оценка точности геодезических построений анализируемым методом.

Теперь вкратце приведем алгоритм метода наименьших квадратов (МНК). В этих условиях от параметрических уравнений поправок переходят к системе нормальных уравнений и решают и [3, 4, 6–16]:

$$\hat{\Lambda} = -R^{-1}b = -(A^T P A)^{-1} A^T l, \quad (14)$$

где  $R^{-1}$  – обратная матрица;  $b$  – вектор столбец свободных членов нормальных уравнений.

Для оценки точности уравненных параметров в данном случае вычисляется полная ковариационная матрица:

$$K_{\hat{x}} = \mu^2 R^{-1}. \quad (15)$$

Здесь среднеквадратическую ошибку единицы веса можно рассчитать, например, по следующей формуле:

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T P V}{n - k}}. \quad (16)$$

Имея ковариационную матрицу вектора уравненных параметров (15), можно определить среднеквадратическую ошибку любого параметра. Для этого стоит воспользоваться следующей формулой:

$$m_{\hat{x}_j} = \sqrt{K_{\hat{x}_{jj}}}, \quad (17)$$

где  $K_{\hat{x}_{jj}}$  – диагональные элементы ковариационной матрицы (15).

Таким образом, решается задача уравнивания и оценки точности элементов геодезической сети при параметрическом способе по методу наименьших квадратов.

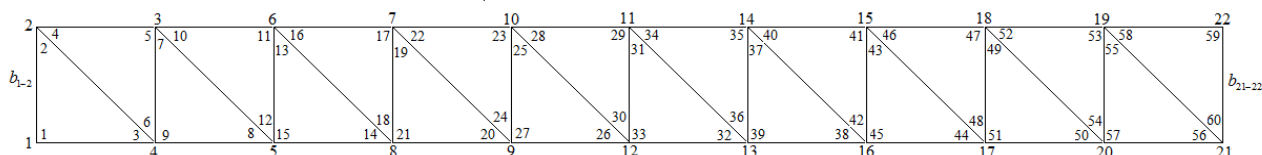
### Результаты

Сравнительный анализ двух алгоритмов уравнивания и оценки точности показывает, что метод псевдонормальной оптимизации значительно сокращает и упрощает процедуру уравнивания и оценку точности геодезических сетей, так как отпадает этап перехода к нормальным уравнениям, а также упрощается оценка точности параметров из-за про-

стой формулы (12), позволяющей вычислить среднеквадратическую ошибку для любого уравненного параметра.

Другие преимущества предлагаемого метода покажем на практическом примере геодезической сети. Сравнительный анализ из-

ложенных методов проведем на модели звена триангуляции первого класса. Модель звена сети триангуляции первого класса представляет собой цепочку равносторонних треугольников с длинами сторон 20 км (рисунк).



Звено триангуляционной сети первого класса

На концах звена триангуляции измерены два базиса ( $b_{12}$  и  $b_{2122}$ ) и их дирекционные углы ( $\alpha_{12}$  и  $\alpha_{2122}$ ). Координаты пункта 1 фиксированы.

Моделирование измеренных горизонтальных углов, базисных сторон и дирекционных углов этих сторон выполнялось в предположении, что стандартные ошибки этих элементов составят соответственно:

$\sigma_{\beta_0} = 0,7''$ ,  $\sigma_{b_0} = 50$  мм,  $\sigma_{\alpha_0} = 0,5''$ . Смоделированные значения элементов звена триангуляции приведены в табл. 1.

С использованием исходных координат пункта 1, длин измеренных базисных сторон  $b_{12}$ ,  $b_{2122}$  и данных из табл. 1 по ходовой линии были вычислены приближенные значения координат определяемых пунктов. Результаты представлены в табл. 2.

Таблица 1

Смоделированные (измеренные) значения элементов цепи триангуляции первого класса

Обозначение	Измеренные значения	Вес измеренных величин	Обозначение	Измеренные значения	Вес измеренных величин
$b_{12}$	19999,9912 м	0,000196	$b_{2122}$	20000,0000 м	0,000196
$\alpha_{12}$	0°00'00,00"	1	$\alpha_{2122}$	0°00'00,00"	1
$\beta_1$	89°59'59,91"	1	$\beta_{31}$	44°59'59,69"	1
$\beta_2$	44°59'59,71"	1	$\beta_{32}$	45°00'00,09"	1
$\beta_3$	45°00'00,07"	1	$\beta_{33}$	89°59'59,66"	1
$\beta_4$	44°59'59,81"	1	$\beta_{34}$	44°59'59,88"	1
$\beta_5$	90°00'00,66"	1	$\beta_{35}$	89°59'59,91"	1
$\beta_6$	44°59'59,95"	1	$\beta_{36}$	44°59'59,69"	1
$\beta_7$	45°00'00,27"	1	$\beta_{37}$	44°59'59,64"	1
$\beta_8$	44°59'59,31"	1	$\beta_{38}$	44°59'59,68"	1
$\beta_9$	90°00'00,03"	1	$\beta_{39}$	90°00'00,12"	1
$\beta_{10}$	44°59'59,93"	1	$\beta_{40}$	45°00'00,11"	1
$\beta_{11}$	89°59'59,97"	1	$\beta_{41}$	90°00'00,81"	1
$\beta_{12}$	45°00'00,45"	1	$\beta_{42}$	45°00'00,07"	1
$\beta_{13}$	44°59'59,81"	1	$\beta_{43}$	44°59'59,60"	1
$\beta_{14}$	44°59'59,22"	1	$\beta_{44}$	45°00'00,10"	1
$\beta_{15}$	89°59'59,67"	1	$\beta_{45}$	90°00'00,40"	1

Окончание табл. 1

Обозначение	Измеренные значения	Вес измеренных величин	Обозначение	Измеренные значения	Вес измеренных величин
$\beta_{16}$	44°59'59,65"	1	$\beta_{46}$	44°59'59,01"	1
$\beta_{17}$	90°00'00,14"	1	$\beta_{47}$	89°59'59,83"	1
$\beta_{18}$	45°00'00,28"	1	$\beta_{48}$	45°00'00,09"	1
$\beta_{19}$	45°00'00,12"	1	$\beta_{49}$	45°00'01,21"	1
$\beta_{20}$	44°59'59,13"	1	$\beta_{50}$	45°00'00,25"	1
$\beta_{21}$	90°00'00,44"	1	$\beta_{51}$	89°59'59,90"	1
$\beta_{22}$	44°59'59,99"	1	$\beta_{52}$	44°59'59,62"	1
$\beta_{23}$	90°00'00,27"	1	$\beta_{53}$	89°59'59,33"	1
$\beta_{24}$	44°59'59,65"	1	$\beta_{54}$	45°00'00,03"	1
$\beta_{25}$	45°00'00,52"	1	$\beta_{55}$	45°00'00,48"	1
$\beta_{26}$	45°00'00,22"	1	$\beta_{56}$	44°59'59,74"	1
$\beta_{27}$	90°00'00,94"	1	$\beta_{57}$	90°00'00,32"	1
$\beta_{28}$	44°59'59,77"	1	$\beta_{58}$	45°00'00,52"	1
$\beta_{29}$	90°00'00,15"	1	$\beta_{59}$	89°59'59,87"	1
$\beta_{30}$	45°00'00,46"	1	$\beta_{60}$	45°00'00,11"	1

Таблица 2

Приближенные значения координат

Пункты сети	Координаты		Пункты сети	Координаты	
	X (м)	Y (м)		X (м)	Y (м)
1	1000,0000	1000,0000	12	999,5734	101000,4428
2	20999,9912	1000,0000	13	999,4909	121000,5115
3	20999,9447	20999,9796	14	20999,5781	121000,5726
4	999,9787	20999,9563	15	20999,4928	141000,6976
5	999,9147	41000,0154	16	999,3639	141000,5948
6	20999,9408	41000,0823	17	999,2321	161000,6752
7	20999,8215	61000,2112	18	20999,2552	161000,8255
8	999,7537	61000,0987	19	20999,1854	181000,8274
9	999,5685	81000,2625	20	999,2233	181000,7915
10	20999,7197	81000,3294	21	999,2088	201000,8254
11	20999,6809	101000,5038	22	20999,2465	201000,8254

Для выполнения уравнительных работ на основе исходных и данных табл. 1 и 2 были рассчитаны матрица коэффициентов уравнений поправок и вектор-столбец свободных членов. Далее по выше предложенному методу была вычислена псевдообратная матрица  $\bar{A}^+$ . По формулам (5) и (6) были вычислены соответственно вектор поправок к приближенным координатам и вектор уравненных координат пунктов. Для оценки точности уравненных координат звена триангуляции применяется формула (12).

Теперь необходимо перейти к уравниванию и оценке точности цепи триангуляции по методу наименьших квадратов. Для этого

предварительно определяют матрицу коэффициентов и вектор-столбец свободных членов нормальных уравнений. Далее по формулам (14) и (6) находят соответственно вектор поправок к приближенным координатам и вектор уравненных координат пунктов. Для оценки точности уравненных координат пунктов сети по формуле (15) определяют ковариационную матрицу уравненного вектора координат и далее по формуле (17) – их среднеквадратические ошибки.

Для сравнения двух методов уравнивания приведем среднеквадратические ошибки положения нескольких удаленных пунктов сети от исходного пункта 1 (табл. 3).

Таблица 3

Среднеквадратические ошибки положения пунктов сети

Номера пунктов		15	16	17	18	19	20	21	22
СКО, см	МПНО	8,1	8,1	7,5	7,5	11,0	11,0	14,8	14,8
	МНК	57,4	57,3	64,1	64,1	69,3	69,3	72,4	72,4

Как видно из табл. 3, среднеквадратические ошибки положения пунктов, полученные сравниваемыми методами, сильно разнятся между собой. Например, для метода наименьших квадратов эта ошибка достигает максимума для пунктов 21 и 22 и равна 72,4 см, тогда как для метода псевдонормальной оптимизации она составляет всего 14,8 см, то есть почти в 5 раз меньше.

### Обсуждение

Чтобы оценить корректность, полученных результатов уравнивания по урavnенным значениям горизонтальных углов и длин сторон для 20 треугольников звена цепи триангуляции, необходимо проверить выполнение геометрических условий.

Результаты представлены в табл. 4.

Таблица 4

Результаты выполнения геометрических условий для двух методов

Номера треугольников	Условия фигур		Синусные условия	
	МПНО	МНК	МПНО (мм)	МНК (мм)
1	-0,01"	-0,01"	0,40	0,48
2	-0,01	-0,01	-0,38	0,16
3	0	0,01	0,13	0,15
4	0	0	0,00	-0,17
5	0	0	0,29	0,48
6	0	0	0,20	0,49
7	0	-0,01	0,22	0,48
8	0	0	0,12	0,15
9	0	0	-0,26	0,17
10	0	0	-0,34	-0,17
11	0	0	0,06	-0,16
12	0	0	0,02	-0,17
13	0	0	0,43	-0,16
14	0	0	0,17	0,16
15	0	0,01	0,47	-0,16
16	0	0	-0,28	0,48
17	0	0	0,07	-0,17
18	0	0	-0,08	0,16
19	0	0	0,44	0,16
20	00,01	0	0,41	-0,16

Анализ результатов проверки условий (см. табл. 4) показывает, что урavnенные элементы сети, полученные по предлагаемым методам, дают практически одинаковые нулевые невязки во всевозможных условных уравнениях, возникающих в данной цепи.

### Заключение

Для окончательного сравнения двух методов уравнивания и оценки точности выполним дополнительные вычисления обобщающих характеристик для сравниваемых

алгоритмов. Такими характеристиками могут выступать обобщенные среднеквадратические ошибки положения пунктов сети. Для метода наименьших квадратов этот показатель вычислим по известной формуле:

$$M_{S_2} = \sqrt{\frac{\text{tr}(Kx)}{k}}, \quad (18)$$

где  $\text{tr}(Kx)$  – след ковариационной матрицы уравненного вектора координат (15).

А для метода псевдонормальной оптимизации авторы предлагают формулу, которая имеет вид:

$$M_{S_1} = \mu \frac{\sum_{j=1}^k \|\bar{a}_j^+\|}{\sqrt{k}}, \quad (19)$$

где  $\|\bar{a}_j^+\|$  – евклидова норма  $j$ -го вектора строки псевдообратной матрицы.

Наконец перейдем к расчету и анализу этих показателей:

$$M_{S_1} = \mu \frac{\sum_{j=1}^k \|\bar{a}_j^+\|}{\sqrt{k}} = 8,34 \text{ см};$$

$$M_{S_2} = \sqrt{\frac{\text{tr}(Kx)}{k}} = 33,48 \text{ см.}$$

Вычислим отношение этих двух показателей:

$$\delta = \frac{M_{S_2}}{M_{S_1}} = 4,01.$$

Анализируя вычисления, можно заключить, что метод псевдонормальной оптимизации позволяет вычислить значения уравненных координат в 4 раза точнее, чем метод наименьших квадратов.

Все вышепродолженные экспериментальные вычисления и анализ результатов дают уверенность авторам рекомендовать метод псевдонормальной оптимизации (метод псевдорешения) для уравнивания и оценки точности любых геодезических построений, в том числе обширных государственных геодезических сетей. Он значительно упрощает процедуру уравнивания и оценки точности, а также является универсальным, то есть может решать вырожденные, плохо обусловленные и невырожденные геодезические задачи и, как показывают расчеты в этой и других работах, окончательные результаты получаются значительно точнее.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Барлиани А. Г. Разработка алгоритмов уравнивания и оценки точности свободных и несвободных геодезических сетей на основе псевдонормального решения : монография. – Новосибирск : СГА, 2010. – 135 с.
2. Барлиани А. Г. Методы обработки и анализа пространственных и временных данных : монография. – Новосибирск : СГУГиТ, 2016. – 177 с.
3. Герасименко М. Д. Современный метод наименьших квадратов с геодезическими приложениями. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 98 с.
4. Жарников В. Б., Ларионов Ю. С. Мониторинг плодородия земель сельскохозяйственного назначения как механизм их рационального использования // Вестник СГУГиТ. – 2017. – Т. 22, № 1. – С. 203–212.
5. Асташков Г. Г., Барлиани А. Г., Колмогоров В. Г. Коррелятная версия уравнивания и оценки точности геодезических сетей с равномерно измеренными величинами методом псевдооптимизации // Вестник СГУГиТ. – 2016. – Вып. 4 (36). – С. 52–65.
6. Бугакова Т. Ю. Моделирование изменения пространственно-временного состояния инженерных сооружений и природных объектов по геодезическим данным // Вестник СГУГиТ. – 2015. – № 1 (29). – С. 34–42.
7. Мазуров Б. Т. Геодинамические системы (кинематические и деформационные модели блоковых движений) // Вестник СГУГиТ. – 2016. – Вып. 3 (35). – С. 5–15.
8. Маркузе Ю. И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей. – М. : Недра, 1982. – 191 с.
9. Маркузе Ю. И., Голубев В. В. Теория математической обработки геодезических измерений. – М. : Альма Матер, 2010. – 247 с.
10. Матвеев С. И. Уравнивание повторных измерений с учетом подвижности пунктов геодезической сети // Геодезия и картография. – 1986. – № 3. – С. 20–24.

11. Коугия В. А. Избранные труды. Исследования по теории математической обработки результатов измерений : монография. – СПб. : ПГУПС, 2012. – 447 с.

12. Карпик А. П., Каленицкий А. И., Соловицкий А. Н. Новый этап развития геодезии – переход к изучению деформаций блоков земной коры в районах освоения угольных месторождений // Вестник СГГА. – 2013. – Вып. 3 (23). – С. 3–9.

13. Карпик А. П. Разработка методики качественной и количественной оценки кадастровой информации // Изв. вузов. Геодезия и аэрофото съемка. – 2013. – № 4/С. – С. 137–142.

14. Карпик А. П., Мурзинцев П. П., Падве В. А. Прикладная геодезия. Геодезическое обеспечение изысканий, строительства и мониторинга

мостовых сооружений : учеб. пособие. – Новосибирск : СГУГиТ, 2015. – 222 с.

15. Карпик А. П., Обиденко В. И. Формирование единого геопространства территорий для повышения качества геодезического обеспечения государственного кадастра недвижимости // Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2013. IX Междунар. науч. конгр. : Пленарное заседание : сб. материалов в 2 т. (Новосибирск, 15–26 апреля 2013 г.). – Новосибирск : СГГА, 2013. Т. 1. – С. 3–11.

16. Совершенствование аналитического способа вычисления границ земельных участков / Е. И. Аврунев, В. В. Вылегжанина, И. А. Гиниятов, В. Г. Колмогоров, Х. К. Ямбаев // Вестник СГУГиТ. – 2019. – Т. 24, № 4. – С. 126–135.

Получено 12.03.2020

© А. Г. Барлиани, Г. А. Неведова, И. В. Карнетова, 2020

## PSEUDONORMAL OPTIMIZATION METHOD AND GEODESIC EQUATION CALCULATIONS

*Amridon G. Barliani*

Siberian State University of Geosystems and Technologies, 10, Plakhotnogo St., Novosibirsk, 630108, Russia, Ph. D. Associate Professor, Department of Applied Informatics and Information Systems, phone: (383)343-18-35

*Galina A. Nefedova*

Siberian State University of Geosystems and Technologies, 10, Plakhotnogo St., Novosibirsk, 630108, Russia, Ph. D. Associate Professor, Department of Applied Informatics and Information Systems, phone: (383)343-18-35

*Irina V. Karnetova*

Siberian State University of Geosystems and Technologies, 10, Plakhotnogo St., Novosibirsk, 630108, Russia, Senior Lecturer, Department of Applied Informatics and Information Systems, phone: (383)343-18-35

The purpose of this paper is a comparative analysis of the methods of least squares and pseudonormal optimization on the example of equalization and estimation of the accuracy of the first-class triangulation link. Pseudonormal optimization is radically different from the traditional method of least squares optimization, since it leads to complex and cumbersome procedures for equalizing and evaluating the accuracy of the results of processing geodesic constructions due to complex formulas. A recurrent method of sequential formation of a pseudoinverse matrix of parametric correction equations is presented, which allows avoiding the time-consuming computational process of composing and solving normal equations. A mathematical algorithm for estimating the accuracy of the equalized parameters is considered. The analysis of the equation works has shown that the pseudonormal optimization method allows calculating the values of the equalized coordinates 4 times more accurately than the least squares optimization.

**Key words:** first class triangulation link, basis side, degenerate matrix, correction equation, least squares method, pseudonormal optimization method, origin of the network coordinates, rank defect of the matrix, Euclidean norm.



REFERENCES

1. Barliani, A. G. (2010). *Razrabotka algoritmov uravnivaniya i otsenki tochnosti svobodnykh i nesvobodnykh geodezicheskikh setey na osnove psevdonormal'nogo resheniya [Development of algorithms for adjustment and estimation of the accuracy of free and non-free geodetic networks based on a pseudonormal solution]*. Novosibirsk: SSGA Publ., 135 p. [in Russian].
2. Barliani, A. G. (2016). *Metody obrabotki i analiza prostranstvennykh i vremennykh dannykh [Techniques for processing and analyzing spatial and temporal data]*. Novosibirsk: SSUGT Publ., 177 p. [in Russian].
3. Gerasimenko, M. D. (1998). *Sovremennyy metod naimen'shikh kvadratov s geodezicheskimi prilozheniyami [Modern least squares method with geodesic applications]*. Vladivostok: Dal'nauka, 98 p. [in Russian].
4. V. B. Zharnikov, Yu. S. Larionov. (2017). Soil fertility monitoring of agricultural purpose lands as a mechanism of their rational use. *Vestnik SGUGiT [Vestnik SSUGT]*, 22(1), 203–212 [in Russian].
5. Astashenkov, G. G., Barliani, A. G., & Kolmogorov, V. G. (2016). Correlated version of accuracy assessment equalization of geodetic networks with equal observations by means of pseudooptimisation. *Vestnik SGUGiT [Vestnik SSUGT]*, 4(36), 52–65 [in Russian].
6. Bugakova, T. Yu. (2015). Modelling of spatio-temporal variations for engineering structures and natural objects by geodetic data. *Vestnik SGUGiT [Vestnik SSUGT]*, 1(29), 34–42 [in Russian].
7. Mazurov, B. T. (2016). Geodynamic system (kinematic and deformation model of block movements). *Vestnik SGUGiT [Vestnik SSUGT]*, 3(35), 5–15 [in Russian].
8. Markuze, Yu. I. (1982). *Uravnivanie i otsenka tochnosti planovykh geodezicheskikh setey [Adjustment and estimation of the accuracy of the planned geodetic networks]*. Moscow: Nedra Publ., 191 p. [in Russian].
9. Markuze, Yu. I., & Golubev, V. V. (2010). *Teoriya matematicheskoy obrabotki geodezicheskikh izmereniy [Theory of mathematical processing of geodetic measurements]*. Moscow: Al'ma Mater Publ., 247 p. [in Russian].
10. Matveev, S. I. (1986). Equalization of repeated measurements taking into account the mobility of points of the geodetic network. *Geodeziya i kartografiya [Geodesy and Cartography]*, 3, 20–24 [in Russian].
11. Kougiya, V. A. (2012). *Izbrannye trudy. Issledovaniya po teorii matematicheskoy obrabotki rezul'tatov izmereniy [Selected Works. Research on the theory of mathematical processing of measurement results]*. Saint Petersburg: PGUPS Publ. 447 p. [in Russian].
12. Karpik, A. P., Kalenitsky, A. I., & Solovitsky, A. N. (2013). New stage of geodesy development: investigation of earth blocks deformation in regions of coal deposits development. *Vestnik SSGA [Vestnik SSGA]*, 3(23), 3–9 [in Russian].
13. Karpik, A. P. (2013). Development of a methodology for the qualitative and quantitative assessment of cadastral information. *Izvestiya vuzov. Geodeziya i aerofotos"emka [Izvestiya Vuzov. Geodesy and Aerophotography]*, 4/S, 137–142 [in Russian].
14. Karpik, A. P., Murzintsev, P. P., & Padve, V. A. (2015). *Prikladnaya geodeziya. Geodezicheskoe obespechenie izyskaniy, stroitel'stva i monitoringa mostovykh sooruzheniy [Geodetic support of surveys, construction and monitoring of bridge structures]*. Novosibirsk: SSUGT Publ., 222 p. [in Russian].
15. Karpik, A. P., & Obidenko, V. I. (2013). Formation of a single geospace of territories to improve the quality of geodetic support of the state real estate cadastre. In *Sbornik materialov Interekspo GEO-Sibir'-2013: Plenarnoe zasedanie: T. 1. [Proceedings of Interexpo GEO-Siberia-2013: Plenary Session: Vol. 1]* (pp. 3–11). Novosibirsk: SSUGT Publ. [in Russian].
16. Avrunev, E. I., Vylegzhanina, V. V., Giniyatov, I. A., Kolmogorov, V. G., & Jambaev, Kh. K. (2019). Improvement of analytical method for land parcel boundaries calculation. *Vestnik SGUGiT [Vestnik SSUGT]*, 24(4), 126–135 [in Russian].

Received 12.03.2020

© A. G. Barliani, G. A. Nefedova, I. V. Karnetova, 2020